

CHAPITRE

3

Limites de fonctions

Terminale - Mathématiques Spécialité

Ce qu'il faut savoir faire :

1/ Rappels sur la dérivabilité

Définition

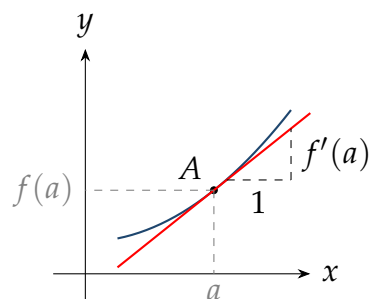
On dit que f est **dérivable en a** lorsque le taux d'accroissement $t(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ admet une limite finie lorsque h tend vers 0. On appelle alors **nombre dérivé** :

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Définition

La **tangente** à la courbe au point A est la droite passant par $A(a; f(a))$ de coefficient directeur $f'(a)$. Son équation réduite est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$



f	Dérivable sur	f'	f	Dérivable sur	f'
k	$\mathbb{R}$	0	$u + v$	I	$u' + v'$
$mx + p$	$\mathbb{R}$	m	λu	I	$\lambda u'$
x^n	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}	$u \times v$	I	$u'v + uv'$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{u}$	$u(x) \neq 0$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\frac{1}{x^n}$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\frac{u}{v}$	$v(x) \neq 0$	$d \frac{u'v - uv'}{v^2}$
$\sqrt{x}$	$]0; +\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	e^u	I	$u'e^u$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x	$u(ax + b)$	I	$a \times u'(ax + b)$

2/ Notion de voisinage

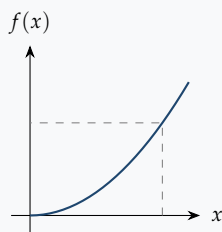
Définition

- Soit $a \in \mathbb{R}$, on appelle **voisinage de a** tout intervalle ouvert contenant a , du type $]a - h; a + h[$.
- Un **voisinage de $+\infty$** est un intervalle du type $]h; +\infty[$ (h aussi grand que l'on veut).
- Un **voisinage de $-\infty$** est un intervalle du type $] - \infty; h[$ (h aussi petit que l'on veut).

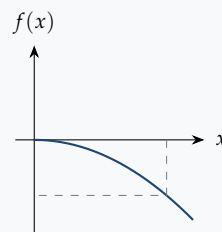
3/ Limite infinie à l'infini

Définition

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ si les images $f(x)$ sont dans un voisinage de $+\infty$ lorsque x est dans un voisinage de $+\infty$.

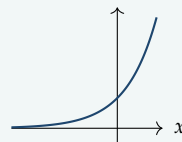
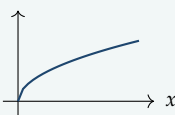
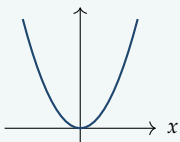


• $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ si les images $f(x)$ sont dans un voisinage de $-\infty$ lorsque x est dans un voisinage de $+\infty$.



On définit de même $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

Limites de référence



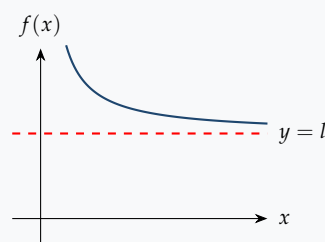
4/ Limite finie à l'infini. Asymptote horizontale.

Définition

Soit f une fonction dont l'ensemble de définition contient $+\infty$.

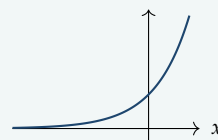
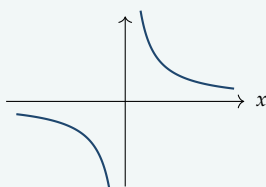
f a pour limite le réel l en $+\infty$ et on note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ si les images de $f(x)$ sont dans un voisinage de l lorsque x est dans un voisinage de $+\infty$.

On définit de même : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$.



La droite d'équation $y = l$ est **asymptote horizontale** à la courbe représentative de f en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$)

Limites de référence



5/ Limite infinie en un réel. Asymptote verticale.

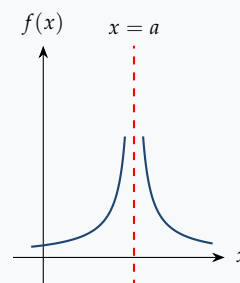
Définition

Soit f une fonction dont l'ensemble de définition contient un réel a .

f a **pour limite** $+\infty$ **quand** x **tend vers** a et on note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ si les images de $f(x)$ sont dans un voisinage de $+\infty$ lorsque x est dans un voisinage de a .

On doit en général distinguer :

- $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$: limite à **gauche** ($x < a$).
- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$: limite à **droite** ($x > a$).



Définition

La droite d'équation $x = a$ est **asymptote verticale** à la courbe représentative de f si et seulement si :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

(Éventuellement seulement à gauche ou seulement à droite).

Limites de référence

6/ Opérations sur les limites

Les limites des fonctions considérées ci-dessous quand la variable tend vers $+\infty$, $-\infty$ ou vers un réel a .

l et l' désignent deux nombres réels.

Somme

$\lim f + g$		$\lim f$		
		l	$+\infty$	$-\infty$
$\lim g$	l'			
	$+\infty$			
	$-\infty$			

Produit

$\lim f \times g$		$\lim f$			
		0	$l \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim g$	0				
	$l' \neq 0$				
	$+\infty$				
	$-\infty$				

Quotient

$\lim \frac{f}{g}$		$\lim f$			
		0	$l \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim g$	0				
	$l' \neq 0$				
	$+\infty$				
	$-\infty$				

F.I. veut dire forme indéterminée, on ne peut pas conclure directement, il faut souvent factoriser.

Exemples :

7/ Théorèmes de comparaison

Note : Dans toute cette section, a désigne soit un nombre réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$. Les propriétés sont valables au voisinage de a .

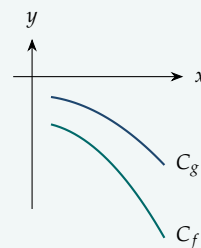
Théorèmes de comparaison (Limites infinies)

Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de a .

Si, pour tout x au voisinage de a , on a $f(x) \leq g(x)$:

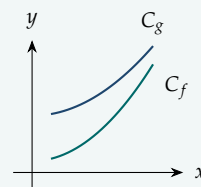
• **Limite $-\infty$:**

Si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.



• **Limite $+\infty$:**

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$.



Théorème « des gendarmes » (Limites finies)

Soient f, g et h trois fonctions et L un réel.

Si, au voisinage de a , on a l'encadrement :

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

et si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ et $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$,
alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.

