

CHAPITRE

1

Les Suites

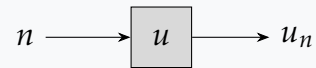
Terminale - Mathématiques Spécialité

Ce qu'il faut savoir faire :

1/ Rappels de la classe de première

Définitions et notations

- Une **suite numérique** est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.
- L'image de l'entier n par la suite est notée u_n . On l'appelle **terme d'indice n** de la suite.
- Cette suite est notée (u_n) ou encore u .



Modes de génération

- **Explicite** : on exprime chaque terme de la suite en fonction de n . On calcule un terme en remplaçant n par le nombre entier correspondant.
Ex : $u_n = -3n + 5$
- **Par Récurrence** : on donne le premier terme de la suite et une méthode de calcul de u_{n+1} en fonction du terme précédent u_n .
Ex : $u_{n+1} = 0,5u_n + 3$ et $u_0 = -2$
- **Par un Algorithme** :

<pre>u = 2 for i in range(4): u = 1 + 1/u print(u)</pre>	<pre>for i in range(5): u = 2*i + 3 print(u)</pre>
$u_0 = 2 \quad , \quad u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$	$u_n = 2n + 3$

Sens de variation

- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$ alors on dit que (u_n) est **croissante**.
- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$ alors on dit que (u_n) est **décroissante**.
- Si l'on ajoute « strictement » au sens de variation cela veut dire que l'inégalité est stricte.
- Sinon (u_n) n'est ni croissante ni décroissante, on dit qu'elle n'est pas monotone.

Suites particulières :

	Arithmétique (u_n) raison r et 1er terme u_0	Géométrique (v_n) raison q et 1er terme v_0 (positif)
Récurrence	pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = u_n + r \end{cases}$	pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} v_0 \\ v_{n+1} = qv_n \end{cases}$
Explicite	pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$ ou pour $k \in \mathbb{N}$ $u_n = u_k + (n - k)r$	pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 q^n$ ou pour $k \in \mathbb{N}$ $v_n = v_k q^{n-k}$
Somme de termes	Pour $n \in \mathbb{N}^*$ $\sum_{k=1}^n k = \frac{n \times (n+1)}{2}$	Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $q \neq 1$ $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$
Sens de variation	• $r < 0 \implies (u_n)$ stric. décroissante • $r > 0 \implies (u_n)$ stric. croissante • $r = 0 \implies (u_n)$ constante	• $0 < q < 1 \implies (v_n)$ stric. décroissante • $q > 1 \implies (v_n)$ stric. croissante • $q = 1 \implies (v_n)$ constante • $q < 0 \implies (v_n)$ non monotone

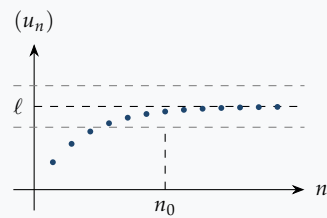
2/ Limite d'une suite

2.1) Limite finie d'une suite (u_n) (suite convergente)**Définition**

On dit que la suite (u_n) a une **limite finie** ℓ quand n tend vers $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de (u_n) à partir d'un certain rang.

On dit que (u_n) **converge vers** ℓ quand n tend vers $+\infty$ et on note :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$$



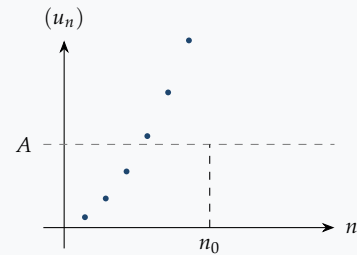
Exemples : $v_n = 5 - \frac{1}{n}$ $w_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

2.2) Limite infinie d'une suite (u_n) (suite divergente)

Définition

On dit que la suite (u_n) a pour **limite** $+\infty$ (respectivement $-\infty$) quand n tend vers $+\infty$, si tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ (resp. $] -\infty; A[$) contient toutes les valeurs de (u_n) à partir d'un certain rang. On note :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$



Exemples : $s_{n+1} = s_n + 4$ (avec $s_0 = -2$) et $t_n = 2^n$.

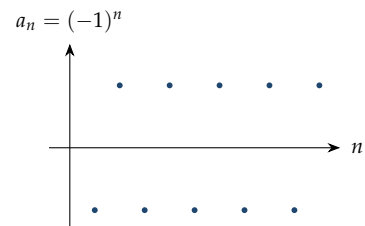
2.3) Suite sans limite (suite divergente)

Définition

Certaines suites n'ont ni de limite finie ni de limite infinie. On dit qu'elles n'ont pas de limite et qu'elles sont divergentes.

Exemples :

- $a_n = (-1)^n$
- $b_n = \sin(n)$



3/ Limites usuelles

Limites de référence

$\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

q	$q \leq -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n$	Pas de limite	0	1	$+\infty$

4/ Opérations sur les limites

ℓ et ℓ' désignent deux nombres réels.

Somme

$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n)$		$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$		
		ℓ'	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	ℓ			
	$-\infty$			
	$+\infty$			

Produit

$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \times v_n)$		$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$			
		$\ell \neq 0$	0	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$\ell' \neq 0$				
	0				
	$-\infty$				
	$+\infty$				

Quotient

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n}$		$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$			
		$\ell \neq 0$	0	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$\ell' \neq 0$				
	0				
	$-\infty$				
	$+\infty$				

Exemples d'opérations sur les limites :