

CHAPITRE

9

Produit Scalaire
de l'espace

Ce qu'il faut retenir :

1/ Produit scalaire de deux vecteurs de l'espace.

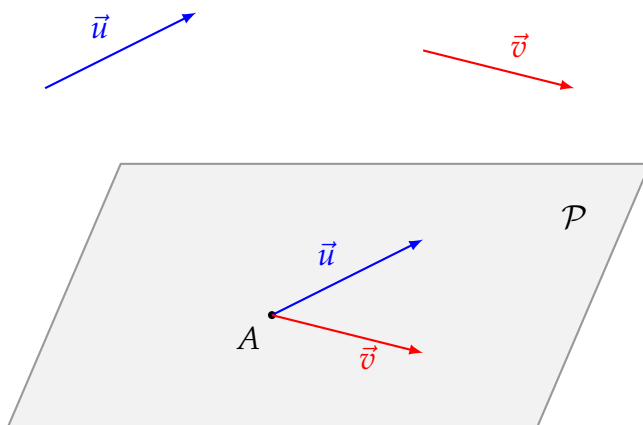
Définition

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de l'espace, alors il existe au moins un plan \mathcal{P} qui contient ces vecteurs.

Le produit scalaire dans l'espace de ces deux vecteurs noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est le même que celui défini dans le plan \mathcal{P} :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v})$$

Le produit scalaire dans l'espace a alors les mêmes définitions et propriétés que dans le plan.

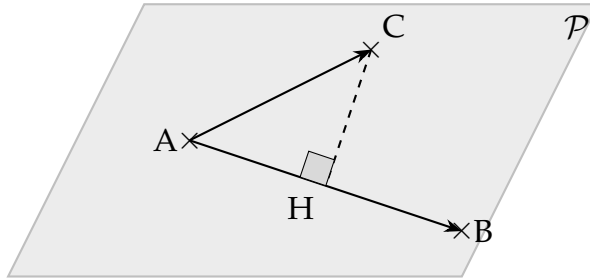
**Propriété d'orthogonalité**

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u}$ et \vec{v} sont orthogonaux.

Définition

Soit \vec{AB} et \vec{AC} deux vecteurs de l'espace.

- Si les vecteurs sont colinéaires et de même sens alors :
 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \|\vec{AB}\| \times \|\vec{AC}\|$.
- Si les vecteurs sont colinéaires et de sens contraires alors :
 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -\|\vec{AB}\| \times \|\vec{AC}\|$.
- Si les vecteurs ne sont pas colinéaires, alors :
 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AH}$ où H est le projeté orthogonal de C sur (AB) .



Propriétés et règles de calcul

Soit \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} trois vecteurs de l'espace, et $k \in \mathbb{R}$:

- \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.
- Symétrie : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.
- Linéarité : $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.
- $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$.

Identités remarquables et Polarisation

Pour \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de l'espace :

- $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$.
- $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$.
- $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$.

Formules de polarisation :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$.

2/ Produit scalaire dans un repère orthonormé.

Définition

Une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace est orthonormée si :

- les vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sont deux à deux orthogonaux.
- $\|\vec{i}\| = 1, \|\vec{j}\| = 1, \|\vec{k}\| = 1$.

Un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace est orthonormé si sa base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormée.

Propriété

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, soit deux vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Distance entre deux points

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, soit $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$ deux points.
On a :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Exemples :

3/ Orthogonalité.

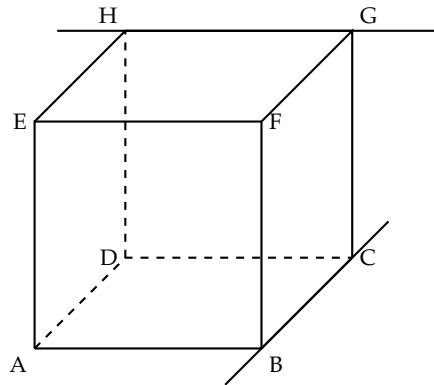
Définition

Deux droites de l'espace sont orthogonales lorsque leurs parallèles passant par un point sont perpendiculaires.

Propriété

Deux droites de l'espace sont orthogonales si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.

Exemple :



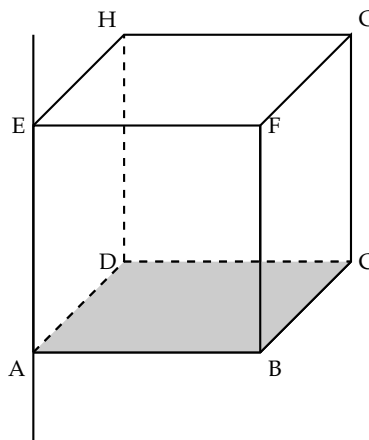
Définition

Une droite est orthogonale à un plan lorsqu'elle est orthogonale à toutes les droites du plan.

Propriété

Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes du plan.

Exemple :



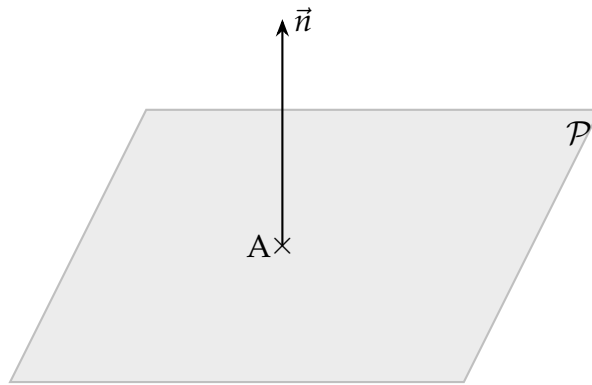
4/ Équation cartésienne d'un plan.

Définition

On considère une droite orthogonale à un plan.
 Tout vecteur directeur de cette droite est appelé **vecteur normal** au plan.

Propriété

Soit A un point, \vec{n} un vecteur non nul.
 Alors il existe un unique plan passant par A et de vecteur normal \vec{n} .



Propriété

Un vecteur non nul \vec{n} de l'espace est normal à un plan \mathcal{P} , s'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de la direction de \mathcal{P} .

Équation cartésienne

On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère un vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et un point $A(x_A; y_A; z_A)$.

Le plan \mathcal{P} qui passe par le point A et de vecteur normal \vec{n} admet pour équation cartésienne :

$$ax + by + cz + d = 0 \quad \text{avec} \quad d = -(ax_A + by_A + cz_A)$$

Exemple :

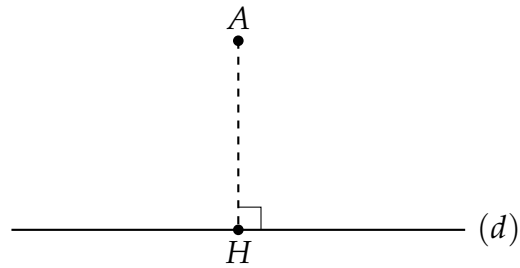
5/ Projection orthogonale.

Projeté sur une droite

Soit A un point et (d) une droite.

Le projeté orthogonal du point A sur la droite (d) est le point H appartenant à (d) tel que (AH) soit perpendiculaire à la droite (d) .

Remarque : On dit que AH est la distance du point A à la droite (d) .

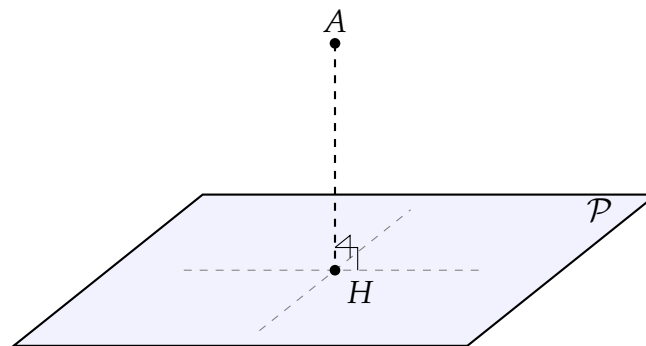


Projeté sur un plan

Soit A un point et \mathcal{P} un plan.

Le projeté orthogonal du point A sur le plan \mathcal{P} est le point H appartenant au plan \mathcal{P} tel que la droite (AH) soit orthogonale au plan \mathcal{P} .

Remarque : On dit que AH est la distance du point A au plan \mathcal{P} .



Exemples de calculs de distance :

Distance point-droite

Calculer la distance entre le point $A(2; -1; 2)$ et la droite (d) dont une représentation paramétrique est :

$$(d) : \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t \\ z = t - 1 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Distance point-plan

Calculer la distance entre le point $A(5;1;3)$ et le plan \mathcal{P} d'équation :

$$(\mathcal{P}) : 3x + y - z - 2 = 0$$