CHAPITRE

7

Loi binomiale, Variable aléatoire

Terminale - Mathématiques Spécialité

I/ Succession d'épreuves indépendantes.

Rappel : Une expérience aléatoire est une expérience qui ne dépend que du hasard.

Définition

Plusieurs expériences aléatoires sont **identiques et indépendantes** si :

— elles ont les mêmes issues ;

— les résultats de chacune d'elles ne dépendent pas des résultats des expériences précédentes.

Propriété

On répète n fois de façon indépendante une expérience aléatoire d'issues $A_1, A_2, \dots, A_n$ de probabilités $P(A_1), P(A_2), \dots, P(A_n)$. La probabilité d'obtenir la suite d'issues $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ est égale au produit de leurs probabilités :

$$P((A_1, A_2, \dots, A_n)) = P(A_1) \times P(A_2) \times \dots \times P(A_n)$$

Exemple :
Une urne contient 3 boules noires (N) et 2 boules blanches (B).
On tire au hasard une boule et on la remet.
On répète l'expérience 3 fois.
Ces expériences sont identiques et indépendantes.

II/ Rappels : Variables aléatoires.

On se place dans le cas d'une expérience aléatoire comportant un nombre fini d'issues. On désigne par Ω l'ensemble de ces issues (Ω est l'univers).

Définition

Une **variable aléatoire** X sur Ω est une fonction qui à chaque issue de Ω associe un nombre réel.

Définition

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Lorsqu'à chaque valeur x_i on associe la probabilité p_i de l'événement $(X = x_i)$, on définit la **loi de probabilité** de X.

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

Remarque : $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$.

Propriété

- Espérance :
$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n$$
- Variance :
$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - E(X))^2$$
- Écart-type : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Exemple :

III/ Épreuve de Bernoulli.

Définition

On appelle **épreuve de Bernoulli** de paramètre p une expérience aléatoire présentant deux issues :

- l'une S, appelée "succès" de probabilité p ;
- l'autre $\overline{S}$, appelée "échec" de probabilité $1 - p$.

La loi de probabilité de la variable aléatoire X (1 si succès, 0 si échec) est appelée **loi de Bernoulli**.

k	0	1
$P(X = k)$	$1 - p$	p

$E(X) = p$ et $V(X) = p(1 - p)$.

Exemple : On lance un dé cubique équilibré. On s'intéresse à l'apparition d'un "six".

IV/ Schéma de Bernoulli.

Définition

On appelle **schéma de Bernoulli** de paramètres n et p l'expérience aléatoire consistant à répéter n fois et de manière indépendante une même épreuve de Bernoulli de paramètre p.

Exemple : On répète trois fois l'expérience du dé précédent.

V/ Loi Binomiale.

Définition

On appelle **loi binomiale** $\mathcal{B}(n, p)$ la loi de probabilité de la variable aléatoire X comptant le nombre de succès sur les n épreuves d'un schéma de Bernoulli.

Définition

Le **coefficient binomial** $\binom{n}{k}$ désigne le nombre de chemins de l'arbre correspondant à k succès pour n épreuves.

Propriété

Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, alors pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$E(X) = np\,;\, V(X) = np(1-p)\,;\, \sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$.

Exemple : Identique au précédent

VI/ Tutoriel Calculatrice TI-82 / TI-83

Utilisation Calculatrice (TI-82/83)

Menu **distrib** (touches **2nde** + **VAR**).

- $P(X = k)$:
- $P(X \leq k)$:

Exemple :