CHAPITRE

6

Compléments sur les Suites

Terminale - Mathématiques Spécialité

Ce qu'il faut savoir faire :

I/ Limites et comparaison.

Théorème :

Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang.

- Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.
- Si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

Théorème des gendarmes :

Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites telles que $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ à partir d'un certain rang.
Si (u_n) et (w_n) convergent vers une même limite l, alors (v_n) converge aussi vers l.

Exemple : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{\sin(n)}{n}\right)$

II/ Suites majorées, minorées, bornées.

Définition

- Une suite (u_n) est dite **majorée** par un réel M lorsque, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant M$. On dit que M est un **majorant** de (u_n).
- Une suite (u_n) est dite **minorée** par un réel m lorsque, pour tout entier naturel n, $m \leqslant u_n$. On dit que m est un **minorant** de (u_n).
- Une suite (u_n) est **bornée** lorsqu'elle est à la fois majorée et minorée.

Exemple :
$u_n = \cos(n)$

Théorème de convergence monotone :

- Une suite croissante et majorée converge.
- Une suite décroissante et minorée converge.

Propriétés :

- Toute suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.
- Toute suite décroissante non minorée a pour limite $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Exemples :

III/ Suites et continuité.

Propriétés :

- Soit f une fonction continue sur un intervalle I et (u_n) une suite d'éléments de I convergeant vers $L \in I$. Alors $\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = f(L)$.
- Soit f une fonction continue sur un intervalle I telle que $f(I) \subset I$ et (u_n) une suite telle que $u_0 \in I$ définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = f(u_n)$. Si (u_n) converge vers L alors $f(L) = L$.

Exemple :

Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et pour tout $n \geqslant 1 \quad u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 2$.
On admet que (u_n) converge vers une limite L.

IV/ Raisonnement par récurrence.

Principes :
On cherche à démontrer qu'une propriété dépendante d'un entier naturel n est vraie pour $n \geqslant n_0$, n_0 étant un entier naturel donné.
On utilise cette méthode lorsque les démonstrations « classiques » sont difficiles.
L'étude des suites se prête naturellement à la démonstration par récurrence.

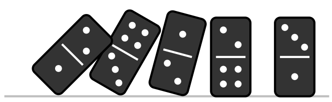
Étape 1 : Initialisation
On montre que la propriété est vraie pour $n = n_0$

Étape 2 : Hérédité
On démontre que si la propriété est supposée vraie pour $k \geqslant n_0$ (hypothèse de récurrence) alors elle est vraie pour l'entier suivant $k + 1$
(on dit que la propriété est héréditaire à partir du rang n_0)

Étape 3 : Conclusion
En combinant les étapes 1 et 2 et en procédant ainsi pas à pas on peut conclure que la propriété est vraie pour tout $n \geqslant n_0$

Étape 1 : Initialisation
Le premier domino tombe

Étape 2 : Hérédité
Si un domino tombe, le suivant tombe aussi



Étape 3 : Conclusion
Tous les dominos tombent

Exemple : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 + u_n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.