

CHAPITRE

8

Compléments sur la Dérivation

Terminale - Mathématiques Spécialité

Ce qu'il faut savoir faire :

1/ Fonction composée

1.1) Définition

Exemple :

Soit $f(x) = e^{3x+1}$ définie sur \mathbb{R} . Cette fonction est la composée de deux fonctions :

$$\begin{array}{ccc} u & & v \\ x & \mapsto & 3x + 1 & \mapsto & e^{3x+1} \end{array}$$

Avec $u(x) = 3x + 1$ et $v(x) = e^x$.

On dit que f est la composée de u par v et on note : $f(x) = v \circ u(x) = v(u(x)) = e^{3x+1}$.

Définition

Soient u une fonction définie sur un intervalle I à valeurs dans un intervalle J et v une fonction définie sur l'intervalle J .

La **fonction composée de u par v** , notée $v \circ u$ est la fonction définie sur I par :

$$(v \circ u)(x) = v(u(x))$$

1.2) Dérivée d'une fonction composée

Propriété

Soit une fonction u définie et dérivable sur un intervalle I et prenant ses valeurs dans un intervalle J . Soit une fonction v définie et dérivable sur l'intervalle J .

La fonction $f = v \circ u$ est **dérivable** sur l'intervalle I et on a :

$$f' = (v' \circ u) \times u' \quad \text{ou encore} \quad f'(x) = v'(u(x)) \times u'(x)$$

Exemple :

Fonction	Ensemble de définition	Dérivée
e^u	\mathbb{R}	$u' \times e^u$
$u^n \quad (n \in \mathbb{Z}^*)$	Si $n < 0$, pour $u(x) \neq 0$	$n \times u^{n-1} \times u'$
$\frac{1}{u}$	$u(x) \neq 0$	$\frac{-u'}{u^2}$
\sqrt{u}	$u(x) > 0$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

1.3) Méthode : Limite d'une fonction composée

Soit $f(x) = (-x^2 + x - 3)^2$ la fonction définie sur \mathbb{R} .

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2 + x - 3) = -\infty$
- $\lim_{X \rightarrow -\infty} X^2 = +\infty$

Donc par composition de limites : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

1.4) Dérivée seconde

Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . On note f' sa fonction dérivée. Lorsque f' est dérivable sur I , on note f'' sa dérivée. f'' est appelée **dérivée seconde** de f sur I .

Exemple :

2/ Convexité

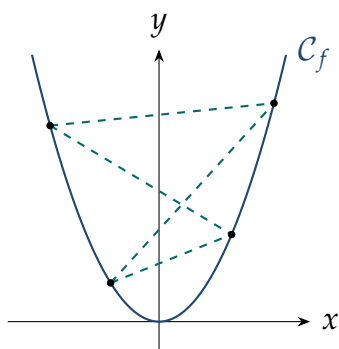
Dans le langage courant l'adjectif *convexe* se rapporte à un objet qui présente une surface bombée. En optique, on parle d'une lentille convexe pour une lentille convergente.

Corde et position de la courbe

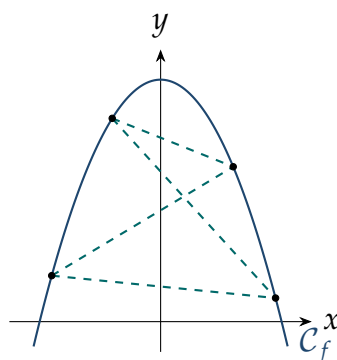
Une **corde** est un segment reliant deux points d'une courbe.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

- f est **convexe** sur I lorsque sa courbe représentative est entièrement située **en-dessous de chacune de ses cordes**.
- f est **concave** sur I lorsque sa courbe représentative est entièrement située **au-dessus de chacune de ses cordes**.



Fonction convexe

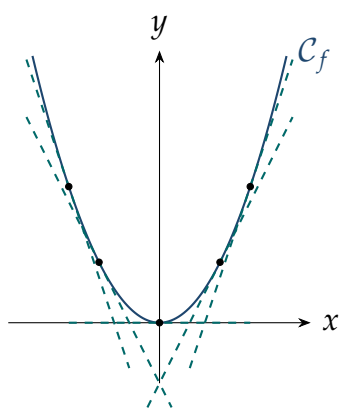


Fonction concave

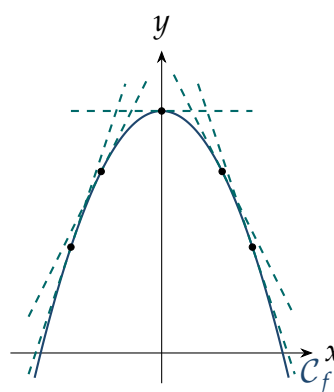
Position par rapport aux tangentes

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I .

- f est **convexe** sur I lorsque sa courbe est entièrement située **au-dessus de chacune de ses tangentes**.
- f est **concave** sur I lorsque sa courbe est entièrement située **au-dessous de chacune de ses tangentes**.



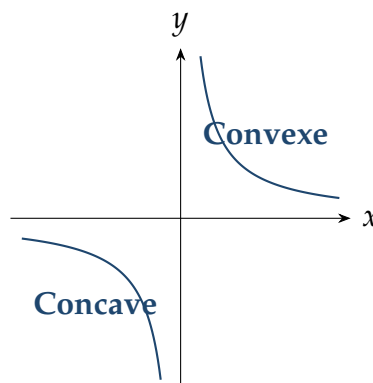
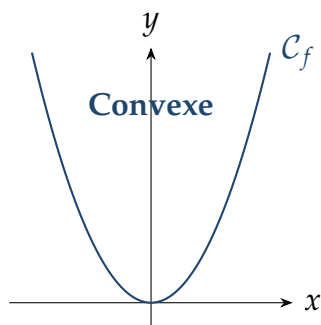
Tangentes en-dessous



Tangentes au-dessus

Exemples de référence :

- La **fonction carré** $x \mapsto x^2$ est **convexe** sur \mathbb{R} .
- La **fonction inverse** $x \mapsto \frac{1}{x}$ est **concave** sur $] -\infty; 0[$ et **convexe** sur $]0; +\infty[$.



Caractérisation par la dérivée seconde

Soit f une fonction définie et **deux fois dérivable** sur un intervalle I .

- f est **convexe** sur $I \iff f'$ est croissante sur $I \iff f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.
- f est **concave** sur $I \iff f'$ est décroissante sur $I \iff f''(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$.

2.1) Point d'inflexion

Définition

Un **point d'inflexion** est un point où la courbe représentative d'une fonction traverse sa tangente. À ce point, la fonction change de convexité.

Propriété

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I .

La courbe représentative de f admet un point d'inflexion au point d'abscisse a si et seulement si, f'' s'annule en changeant de signe en a .

Exemple :

- $f(x) = x^3$ admet un point d'inflexion en $O(0;0)$.

