

CHAPITRE

2

Combinatoire, dénombrement

Arrangements, permutations, combinaisons

Ce qu'il faut retenir :

1/ Cardinal d'ensemble fini

Définition

- Soit n un entier naturel. Lorsqu'un ensemble E a n éléments, on dit que E est un **ensemble fini**.
- Le nombre n d'éléments de E est appelé le **cardinal de E** , il est noté $\text{card}(E)$.
- Par convention, l'ensemble vide $\emptyset$ est un ensemble fini de cardinal 0.

Exemple : On considère l'ensemble E des élèves du lycée, alors $\text{card}(E) = 874$.

1.1) Principe additif

Définition

Deux ensembles sont **disjoints** s'ils n'ont aucun élément en commun.

Propriété

Soit $E_1, \dots, E_n$ des ensembles finis deux à deux disjoints. Alors :

$$\text{card}(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n) = \text{card}(E_1) + \text{card}(E_2) + \dots + \text{card}(E_n)$$

Exemple : $E_1 = \{a; b; c; d\}$ et $E_2 = \{7; 8; 9\}$. Calcul de $\text{card}(E_1 \cup E_2)$:

1.2) Principe multiplicatif

Définition

Le **produit cartésien** $E_1 \times E_2$ est l'ensemble des **couples** (a_1, a_2) .

Propriété

$$\text{card}(E_1 \times E_2) = \text{card}(E_1) \times \text{card}(E_2)$$

Pour un ensemble E à n éléments : $\text{card}(E^p) = n^p$.

Exemple : $E = \{\text{salade; cevice}\}$ et $P = \{\text{poulet; steak; légumes}\}$. Menus : . . .

2/ Arrangements et permutations

Factorielle

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$. Convention : $0! = 1$.

2.1) Arrangements

Définition

Un **arrangement** de p éléments de E ($p \leq n$) est un p -uplet d'éléments **distincts**. L'ordre compte et les éléments ne se répètent pas.

Propriété

Le nombre d'arrangements de p éléments parmi n est :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Exemple : Soit $A = \{1; 2; 3; 4\}$. Nombre d'arrangements de 2 éléments de A : . . .

2.2) Permutations

Propriété

Une permutation est un arrangement de tous les n éléments d'un ensemble. Son nombre est : $n!$

Exemple : Nombre de façons d'asseoir 4 personnes sur 4 places :

3/ Combinaisons

Définition

Une **combinaison** de p éléments de E est un **sous-ensemble** de E de cardinal p .
L'ordre n'a pas d'importance.

Propriété

Le nombre de combinaisons de p éléments parmi n est donné par :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

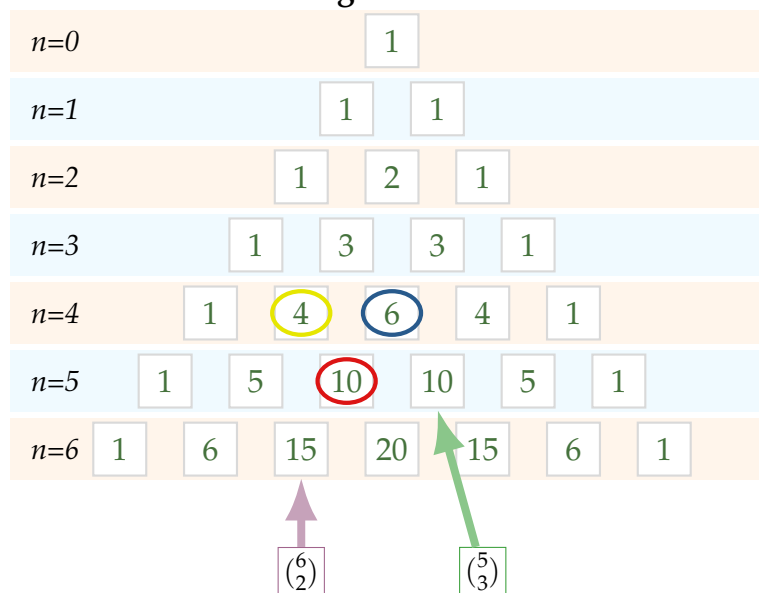
Exemple : Choisir 2 délégués dans une classe de 20 élèves :

3.1) Propriétés et Relation de Pascal

Propriété

- $\binom{n}{0} = 1$; $\binom{n}{n} = 1$; $\binom{n}{1} = n$; $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$
- **Symétrie :** $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ **Relation de Pascal :** $\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$

Triangle de Pascal



$$\binom{5}{2} = \binom{4}{1} + \binom{4}{2}$$

Exemple : Vérification de la relation de Pascal ci-dessus :

Propriété

Le nombre total de sous-ensembles d'un ensemble à n éléments est :

$$\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = 2^n$$

Carte mentale Bilan
