

CHAPITRE

2

Découverte des matrices

Ce qu'il faut savoir faire :

I/ Les matrices.

Définition

Une **matrice** est un tableau rectangulaire formé de n lignes et p colonnes de nombres (appelés **coefficients**). Sa taille (ou format) est $n \times p$.

On désigne souvent une matrice par une lettre majuscule.

Exemple :

Définition

- Une matrice n'ayant qu'une seule colonne est appelée **matrice colonne**.

Exemple :

- Une matrice n'ayant qu'une seule ligne est appelée **matrice ligne**.

Exemple :

- Une matrice contenant autant de lignes que de colonnes est appelée **matrice carrée**.

Exemple :

Méthode : Saisir une matrice sur la calculatrice.

Par **matrice** choisir Éditer puis 1 :[A]

Modifier la dimension 1×1 proposée.

Entrer les coefficients en validant chacun par **entrer**

MATRICE[A] 3×2

$$\begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A 1 2

$$\begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Définition générale :

Une matrice A de taille $n \times p$ (m, n entiers naturels non nuls) peut s'écrire de la forme ci-contre.

Les nombres a_{ij} pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$ s'appellent les **coefficients** de la matrice.

On note $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$

Le coefficient a_{ij} est le nombre placé à la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne.

Définition

- Deux matrices A et B de même dimension sont égales si et seulement si leurs coefficients sont tous égaux (autrement dit pour tout i et pour tout j $a_{ij} = b_{ij}$).
- On appelle **matrice nulle** la matrice dont les coefficients sont 0.
- On appelle **matrice identité d'ordre n** la matrice carrée d'ordre n contenant uniquement des 1 sur sa diagonale principale et des 0 ailleurs.

Exemple :

II/ Opérations.

Addition de matrices :

Si $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont deux matrices de même taille $n \times p$, leur somme $A + B$ est définie par $A + B = (c_{ij})$ où $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$.

$A + B = B + A$ **l'addition est commutative**

Exemple :

Multiplication par un réel :

Soit une matrice $A = (a_{ij})$ de taille $n \times p$ et λ un réel. La matrice λA est la matrice (b_{ij}) définie par $b_{ij} = \lambda a_{ij}$ pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$.

Exemple :

Multiplication d'une matrice ligne par une matrice colonne :

Soit $A = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)$ une matrice ligne $1 \times n$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$ une matrice colonne $n \times 1$.

$$\text{Alors } A \times B = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n) \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 \times b_1 + a_2 \times b_2 + \dots + a_n \times b_n.$$

Exemple :

$$A = (1 \ 2 \ 3 \ 4) \ , \ D = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ pour calculer } A \times D \text{ on effectue le calcul ainsi :}$$

Multiplication de deux matrices :

Soit $A = (a_{ij})$ de taille $n \times p$ et $B = (b_{ij})$ de taille $p \times q$.

Alors le produit $A \times B$ est la matrice C de taille $n \times q$ dont chaque coefficient c_{ij} est le produit de la ligne i de A par la colonne j de B pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq q$.

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{pour calculer } A \times B \text{ on effectue le calcul}$$

ainsi :

Remarques :

- Si la matrice A n'a pas le même nombre de colonnes que le nombre de lignes de la matrice B , alors $A \times B$ n'existe pas.
- Le produit de deux matrices **n'est pas commutatif** (en général $A \times B \neq B \times A$).
- Si $A \times B = A \times C$ on ne peut pas en déduire que $B = C$.
- Si $A \times B = 0$ on ne peut pas déduire que $A = 0$ ou $B = 0$.

Propriétés :

- Le produit de matrices est **associatif** :
si A est de taille $n \times p$, B de taille $p \times q$ et C de taille $q \times r$, alors on a :
$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C).$$
- Le produit de matrices est **distributif** par rapport à la somme de matrices : si A, B et C sont de dimensions telles que les produits aient un sens, alors on a :
$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C \quad \text{et} \quad (A + B) \times C = A \times C + B \times C$$
- Produit par un réel λ : $(\lambda A) \times B = \lambda (A \times B)$ et $A \times (\lambda B) = \lambda (A \times B)$.
- Multiplier une matrice A de taille $n \times p$ par l'identité ne modifie pas la matrice :
$$I_n \times A = A \quad \text{et} \quad A \times I_p = A.$$

Définition

Soit A une matrice carrée d'ordre n , et k un entier naturel non nul, on appelle puissance $k^{\text{ième}}$ de A , la matrice $A^k = A \times A \times A \times \dots \times A$

Exemple :

III/ Matrices inversibles.**Définition**

- Soit A une matrice carrée d'ordre n . On dit que A est **inversible** si et seulement si il existe une matrice carrée d'ordre n , notée A^{-1} et telle que $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I_n$.
- La matrice A^{-1} est alors unique et appelée la **matrice inverse** de A .

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & -0,5 \\ -2 & 1,5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -0,5 \\ -2 & 1,5 \end{pmatrix}$$

Propriété

Soit A une matrice carrée d'ordre 2, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

- La matrice A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$.
- Le réel $ad - bc$ est appelé **déterminant** de la matrice A et noté Δ .
- Si $ad - bc \neq 0$ alors $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Exemple :

IV/ Matrices et systèmes linéaires.

Exemple :

On considère le système aux inconnues x_1, x_2 et x_3 suivant :

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= -1 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 &= 2 \\ -4x_1 + 3x_2 &= 6 \end{cases}$$

On peut l'écrire sous la forme matricielle suivante :

Propriétés :

- Un système linéaire à n équations à n inconnues peut s'écrire sous une forme matricielle $AX = Y$ où A est une matrice carrée d'ordre n , X et Y sont des matrices colonnes de taille $n \times 1$.
- Si A est inversible, le système a alors une unique solution donnée par $X = A^{-1} \times Y$.

Exemple :