

## CHAPITRE

## 3

## Découverte nombres complexes

Ce qu'il faut savoir faire :

## I/ Introduction.

### Théorème et définitions :

- Il existe un nombre dit imaginaire noté  $i$  solution de l'équation  $x^2 + 1 = 0$ , c'est à dire tel que  $i^2 = -1$ .
- On note  $\mathbb{C}$  l'ensemble des **nombres complexes** qui s'écrivent de façon unique sous la forme  $z = x + iy$  où  $x$  et  $y$  sont des nombres réels.
  - Cette forme est appelée la **forme algébrique** de  $z$ .
  - $x$  est appelé **partie réelle** de  $z$  et on note  $x = \text{Re}(z)$ .
  - $y$  est appelé **partie imaginaire** de  $z$  et on note  $y = \text{Im}(z)$ .
- Un nombre complexe de partie réelle nulle est appelé **imaginaire pur**.

Exemples :

**Propriétés :**

- $\mathbb{R}$  est inclus dans  $\mathbb{C}$  (un nombre réel est un nombre complexe de partie imaginaire nulle).
- Les opérations (sommes, produit) et les règles de calcul prolongent sur  $\mathbb{C}$  celles définies sur  $\mathbb{R}$ .
- Tout nombre complexe  $z$  non nul admet dans  $\mathbb{C}$  un inverse noté  $\frac{1}{z}$ .
- Soit  $z'$  un nombre complexe non nul, on définit le quotient  $\frac{z}{z'}$  par :  $\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}$

*Exemples :*

**Théorèmes :**

- Deux nombres complexes sont égaux si et seulement s'ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.
- Un nombre complexe est nul si et seulement si sa partie réelle est nulle et sa partie imaginaire est nulle.

## II/ Propriétés.

### Définition

Soit  $z \in \mathbb{C}$  de forme algébrique  $z = x + iy$  avec  $(x; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

On définit le **conjugué** de  $z$  noté  $\bar{z}$  le nombre complexe  $\bar{z} = x - iy$ .

Exemple :

### Propriétés :

- Un nombre complexe  $z$  est réel si et seulement si  $z = \bar{z}$ .
- Un nombre complexe  $z$  est imaginaire pur si et seulement si  $z = -\bar{z}$ .

Démonstration :

### Proposition : Soient $z_1$ et $z_2$ deux nombres complexes. Alors :

- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
- $\overline{z_1 \times z_2} = \bar{z}_1 \times \bar{z}_2$
- $\overline{z_1^n} = \bar{z}_1^n$
- pour  $z_2 \neq 0$   $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

### Théorème : Soit $z = x + iy$ avec $(x; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Alors :

- $z \times \bar{z} = x^2 + y^2$
- si  $z \neq 0$ ,  $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{x^2 + y^2}$

Démonstration :