CHAPITRE

4 Congruence dans $\mathbb{Z}$

Ce qu'il faut savoir faire :

I/ Découverte.

Définition

Soit n un entier naturel, a et b deux entiers relatifs.
On dit que a et b sont **congrus modulo** n lorsque a et b ont le même reste dans la division euclidienne par n.
On note $a \equiv b\ [n]$ et on lit « a est congru à b modulo n ».

Exemple :

Proposition :

Soit n un entier naturel, a et b deux entiers relatifs. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- a est congru à b modulo n.
- il existe un entier relatif q tel que $a = nq + b$.
- $a - b$ est multiple de n.

Exemple :

Théorème :

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Tout entier relatif a est de l'une des formes suivantes :

$$a \equiv 0\ [n] \quad \text{ou} \quad a \equiv 1\ [n] \quad \text{ou} \ldots \text{ou} \quad a \equiv n-2\ [n] \quad \text{ou} \quad a \equiv n-1\ [n]$$

Exemple :

II/ Congruence et opérations.

Propriétés :

Soit n un entier naturel, a, b, c et d des entiers relatifs.

- **Symétrie :** $a \equiv b\ [n] \iff b \equiv a\ [n]$.
- **Transitivité :** si $a \equiv b\ [n]$ et $b \equiv c\ [n]$ alors $a \equiv c\ [n]$.
- **Compatibilité avec l'addition :** si $a \equiv b\ [n]$ et $c \equiv d\ [n]$ alors $a + c \equiv b + d\ [n]$.
- **Compatibilité avec la multiplication :** si $a \equiv b\ [n]$ et $c \equiv d\ [n]$ alors $a \times c \equiv b \times d\ [n]$.

Proposition :

Soit n un entier naturel, a, b et k des entiers relatifs.

- Si $a \equiv b\ [n]$ alors $a + k \equiv b + k\ [n]$.
- Si $a \equiv b\ [n]$ alors $k \times a \equiv k \times b\ [n]$.
- Si $a \equiv b\ [n]$ alors $a^k \equiv b^k\ [n]$ (pour $k \in \mathbb{N}$).

Exemples :

Définition

Soient a un entier relatif et m un entier naturel non nul.
On dit que a est **inversible modulo** m lorsqu'il existe un entier b tel que $a \times b \equiv 1\ [m]$.

Exemple :

III/ Critères de divisibilité.