

CHAPITRE

1

Arithmétique, divisibilité et division euclidienne

Ce qu'il faut savoir faire :

I/ Divisibilité dans $\mathbb{Z}$.

$\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels.

$\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs.

Définition

a et b deux entiers relatifs, on dit que b divise a et on note $b \mid a$ s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = kb$.

Vocabulaire

Dire que b divise a est équivalent à dire que :

- b est un **diviseur** de a
- a est **divisible** par b
- a est un **multiple** de b

Exemples :

Propositions :

Soit a et b des entiers relatifs non nuls.

- La divisibilité ne dépend pas du signe : $b \mid a \Leftrightarrow (-b) \mid a \Leftrightarrow b \mid (-a) \Leftrightarrow (-b) \mid (-a)$.
- Si b divise a alors $|b| \leq |a|$.

Conséquence : Pour donner la liste des diviseurs d'un entier a , il suffit de chercher ses diviseurs potentiels tels que $0 \leq b \leq \sqrt{a}$.

Exemple :

Propriétés :

Soit a, b , et c des entiers relatifs non nuls.

- **Transitivité** : Si $c \mid b$ et $b \mid a$ alors $c \mid a$.
- **Combinaison linéaire** : Si $c \mid b$ et $c \mid a$ alors pour tous entiers relatifs u et v , $c \mid (au + bv)$.

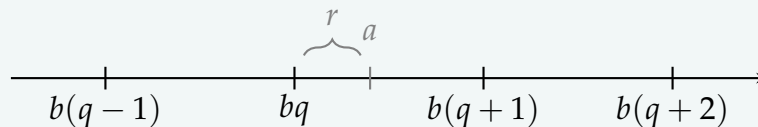
Exemple :

II/ Division euclidienne.

Théorème

Soit a entier naturel et b un entier naturel non nul.

Il existe un unique couple d'entiers $(q; r)$ tel que $a = bq + r$ avec $0 \leq r < b$.

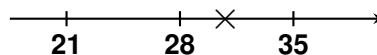


Remarque : Ce théorème s'étend pour le cas où a est un entier relatif.

Vocabulaire

- Effectuer la **division euclidienne** de a par b consiste à trouver le couple $(q; r)$ du théorème précédent.
- a est appelé **dividende**, b est appelé **diviseur**, q est appelé **quotient** et r est appelé **reste** de la division euclidienne de a par b .

Exemple :



Proposition

Soient a et b deux entiers, avec b non nul .
 a est divisible par b si et seulement si le reste de la division euclidienne de a par b est nul.

Méthode : Effectuer une division euclidienne.**Python :**

Entrée[4]: 31%7 #reste dans la division euclidienne...
 Sortie[4]: 3

Entrée[5]: 31//7 #quotient dans la division euclidienne...
 Sortie[5]: 4

Calculatrice TI :

Touche **math**
 Menu **NBRE** puis 0↓reste(

reste(31,7)

3

III/ Logique et méthodes de démonstration.

Par l'absurde :

Par disjonction des cas :

Par équivalence :