

CHAPITRE

3

Nombres réels

Intervalles, valeur absolue et calcul littéral

Ce qu'il faut retenir :

1/ La droite numérique et les ensembles de nombres

1.1) Les ensembles de nombres

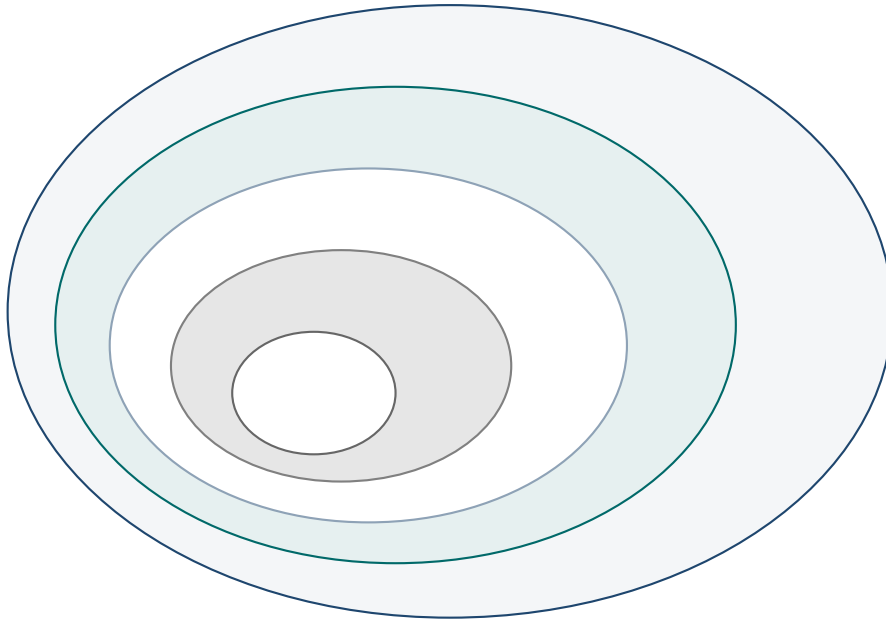
Définitions des ensembles de nombres

- **Entiers naturels** (\mathbb{N}) : nombres entiers positifs (0, 1, 2, 3...).
- **Entiers relatifs** (\mathbb{Z}) : nombres entiers positifs et négatifs (... - 2, -1, 0, 1, 2...).
- **Nombres décimaux** (\mathbb{D}) : nombres pouvant s'écrire avec un nombre fini de chiffres après la virgule (ex : 0,25 ; -1,5).
- **Nombres rationnels** (\mathbb{Q}) : nombres pouvant s'écrire sous la forme d'une fraction $\frac{a}{b}$ (avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$).
- **Nombres réels** (\mathbb{R}) : l'ensemble de tous les nombres existants sur la droite numérique.
- **Nombres irrationnels** : nombres réels qui ne peuvent pas s'écrire sous forme de fraction. Ils ont une infinité de décimales sans motif répétitif (ex : $\pi, \sqrt{2}$).

Inclusions successives

Chaque ensemble est contenu dans le suivant. On note cela avec le symbole d'inclusion \subset (« est inclus dans ») :

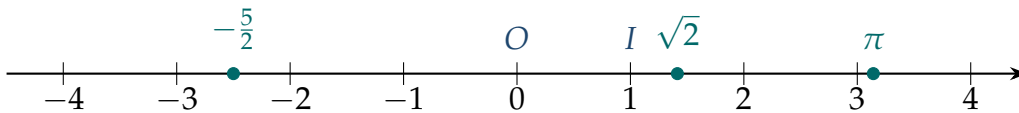
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$



1.2) La droite numérique

Définition



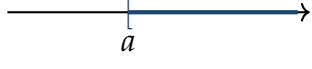

À chaque point d'une droite graduée correspond un unique nombre appelé son **abscisse**. L'ensemble des abscisses de tous les points de la droite graduée est l'ensemble des **nombre réels** \mathbb{R} .



2/ Intervalles de \mathbb{R}

Définition

Un **intervalle** est un ensemble de nombres réels correspondant à un segment, une demi-droite ou la droite entière sur la droite numérique.

Inégalités	Intervalle	Représentation sur la droite
$a \leq x \leq b$	$x \in [a; b]$	
$a < x \leq b$	$x \in]a; b]$	
$x \geq a$	$x \in [a; +\infty[$	
$x < b$	$x \in]-\infty; b[$	

Exemples : Traduire par un intervalle :

- $x \geq 5$ correspond à $x \in$
- $-2 < x \leq 7$ correspond à $x \in$

3/ Valeur absolue et distance

3.1) Distance entre deux réels

Propriété

Sur une droite graduée, la **distance** entre deux points A et B d'abscisses respectives a et b est la différence entre la plus grande et la plus petite abscisse. Cette distance est toujours **positive**.

Exemple : Si $A(-3)$ et $B(4)$, la distance $AB =$

3.2) Valeur absolue

Définition

La **valeur absolue** d'un nombre réel x , notée $|x|$, est la distance entre le point d'abscisse x et l'origine O (d'abscisse 0) sur la droite graduée.

Conséquence :

- Si $x \geq 0$, alors $|x| = x$.
- Si $x \leq 0$, alors $|x| = -x$.

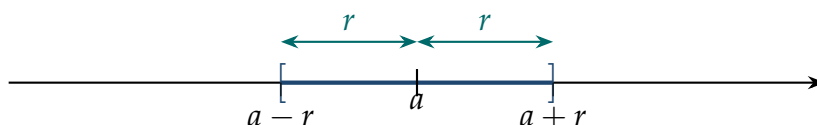
Exemples :

- $|-7| =$
- $|5,4| =$
- La distance entre a et b s'écrit : $AB = |b - a|$

3.3) Lien entre valeur absolue, distance et intervalle

Soit a et r deux nombres réels avec $r \geq 0$. Dire que la distance entre x et a est inférieure ou égale à r s'écrit mathématiquement :

$$|x - a| \leq r \iff x \in [a - r; a + r]$$



Exemple : Traduire l'inégalité $|x - 5| \leq 2$:

4/ Valeurs approchées, arrondi et encadrement

Encadrement et Amplitude

- **Encadrer** un nombre x , c'est trouver deux nombres a et b tels que $a \leq x \leq b$.
- La différence $b - a$ est appelée l'**amplitude** de l'encadrement.

Valeurs approchées et Arrondi

Soit un nombre x encadré par $a \leq x \leq b$ avec une amplitude d'une certaine puissance de 10 (ex : 10^{-1} , 10^{-2}).

- a est la **valeur approchée par défaut**.
- b est la **valeur approchée par excès**.
- L'**arrondi** de x est la valeur (par défaut ou par excès) qui est la **plus proche** de x .

Règle pratique pour arrondir

Pour arrondir un nombre à une certaine précision (par exemple au dixième), on regarde le chiffre situé juste après la coupure (le chiffre des centièmes) :

- Si ce chiffre est **0, 1, 2, 3 ou 4**, on garde le nombre coupé tel quel (*c'est la valeur par défaut*).
- Si ce chiffre est **5, 6, 7, 8 ou 9**, on augmente de 1 le dernier chiffre conservé (*c'est la valeur par excès*).

Exemple récapitulatif : Considérons le nombre $\frac{22}{7} \approx 3,142857\dots$

Précision	Valeur par défaut	Valeur par excès	Arrondi
À l'unité (10^0)	3	4	3 (car $1 < 5$)
Au dixième (10^{-1})	3,1	3,2	3,1 (car $4 < 5$)
Au centième (10^{-2})	3,14	3,15	3,14 (car $2 < 5$)
Au millième (10^{-3})	3,142	3,143	3,143 (car $8 \geq 5$)

À vous de jouer : Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} pour $x = 5,946$:

$$\dots\dots\dots \leq 5,946 \leq \dots\dots\dots$$

Son arrondi au centième est :

5/ Calcul littéral

Le calcul littéral est l'utilisation de lettres pour représenter des nombres dans des calculs.

5.1) Développer et Factoriser

Définition

- **Développer** c'est transformer un produit en une somme (ou une différence).
- **Factoriser** c'est transformer une somme (ou une différence) en un produit.

Propriété : Identités remarquables

Pour tous nombres réels a et b :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

Démonstration géométrique de $(a + b)^2$:

Exemples : Développer les expressions suivantes :

— $A = (x + 3)^2 =$

— $B = (2x - 5)^2 =$

— $C = (x - 7)(x + 7) =$

Exemples : Factoriser les expressions suivantes :

— $D = x^2 - 16 =$

— $E = 4x^2 + 12x + 9 =$

— $F = 5x + 15 =$