

## CHAPITRE

## 4

# Configurations dans le Plan

Géométrie plane, projeté orthogonal et optimisation

## Ce qu'il faut retenir :

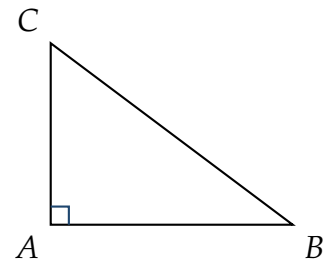
### 1/ Rappels de géométrie plane

#### 1.1) Théorème de Pythagore, réciproque et contraposée

##### 1. Théorème de Pythagore (Calculer une longueur)

Si un triangle  $ABC$  est rectangle en  $A$ , alors le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$



**Exemple :** Soit  $ABC$  un triangle rectangle en  $A$  tel que  $AB = 3$  cm et  $AC = 4$  cm. Calculer la longueur  $BC$ .

## 2. Réciproque du théorème de Pythagore (Prouver qu'un triangle est rectangle)

Dans un triangle  $ABC$ , si le carré du plus grand côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés ( $BC^2 = AB^2 + AC^2$ ), alors ce triangle est rectangle en  $A$ .

*Exemple :* Soit un triangle  $DEF$  tel que  $DE = 5$  cm,  $DF = 12$  cm et  $EF = 13$  cm. Le triangle  $DEF$  est-il rectangle ?

## 3. Contraposée du théorème de Pythagore (Prouver qu'un triangle n'est pas rectangle)

Dans un triangle  $ABC$ , si le carré du plus grand côté n'est pas égal à la somme des carrés des deux autres côtés ( $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$ ), alors ce triangle n'est pas rectangle.

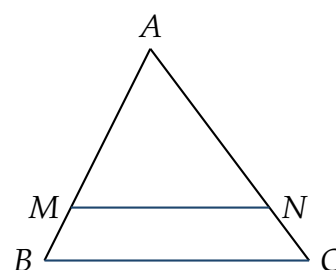
*Exemple :* Soit un triangle  $IJK$  tel que  $IJ = 4$  cm,  $IK = 6$  cm et  $JK = 7$  cm. Le triangle  $IJK$  est-il rectangle ?

## 1.2) Théorème de Thalès, réciproque et contraposée

### 1. Théorème de Thalès (Calculer une longueur)

Soient deux droites sécantes en  $A$ . Soient  $B$  et  $M$  deux points de l'une,  $C$  et  $N$  deux points de l'autre. Si les droites  $(BC)$  et  $(MN)$  sont **parallèles**, alors :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$



**Exemple :** Sur la figure ci-dessus, on donne  $AB = 6$  cm,  $AM = 4$  cm et  $AC = 9$  cm. Sachant que  $(MN) // (BC)$ , calculer la longueur  $AN$ .

## 2. Réciproque du théorème de Thalès (Prouver que des droites sont parallèles)

Si les points  $A, M, B$  d'une part et  $A, N, C$  d'autre part sont alignés **dans le même ordre**, et si  $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ , alors les droites  $(MN)$  et  $(BC)$  sont **parallèles**.

**Exemple :** On donne  $AB = 8$  cm,  $AM = 6$  cm,  $AC = 12$  cm et  $AN = 9$  cm. Les points sont alignés dans le même ordre. Les droites  $(MN)$  et  $(BC)$  sont-elles parallèles?

## 3. Contraposée du théorème de Thalès (Prouver que des droites ne sont pas parallèles)

Si  $\frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC}$ , alors les droites  $(MN)$  et  $(BC)$  **ne sont pas parallèles**.

**Exemple :** On donne  $AB = 5$  cm,  $AM = 3$  cm,  $AC = 7$  cm et  $AN = 4$  cm. Les droites  $(MN)$  et  $(BC)$  sont-elles parallèles?

### 1.3) Trigonométrie dans le triangle rectangle

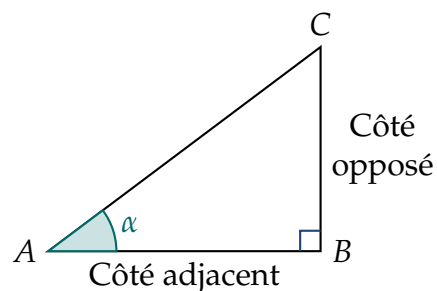
#### Formules de trigonométrie

Dans un triangle rectangle, pour un angle aigu  $\alpha$  :

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Adjacent}}{\text{Hypoténuse}}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Opposé}}{\text{Hypoténuse}}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Opposé}}{\text{Adjacent}}$$



**Moyen mnémotechnique :**  
**SOH CAH TOA**

#### Exemples d'application :

##### 1. Calculer une longueur :

Soit  $ABC$  un triangle rectangle en  $A$  tel que  $AB = 5$  cm et l'angle  $\widehat{ABC} = 35^\circ$ . Calculer la longueur  $AC$  (arrondie au dixième).

##### 2. Calculer la mesure d'un angle :

Soit  $DEF$  un triangle rectangle en  $D$  tel que  $DE = 4$  cm et  $EF = 7$  cm. Calculer la mesure de l'angle  $\widehat{DFE}$  (arrondie au degré près).

**Propriété**

$ABC$  est un triangle rectangle en  $A$  et on note  $\alpha$  la mesure, en degré, d'un angle aigu de ce triangle.

$$0 < \cos(\alpha) < 1$$

$$0 < \sin(\alpha) < 1$$

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$$

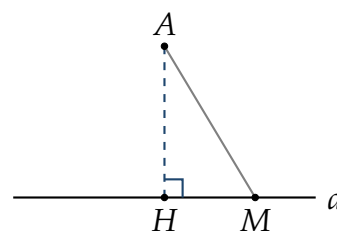
**Démonstrations :**

## 2/ Projeté orthogonal d'un point sur une droite

**Définition**

Soit  $d$  une droite et  $A$  un point n'appartenant pas à  $d$ .

Le **projeté orthogonal** du point  $A$  sur la droite  $d$  est l'unique point  $H$  de la droite  $d$  tel que les droites  $(AH)$  et  $d$  soient **perpendiculaires**.

**Distance d'un point à une droite**

La distance du point  $A$  à la droite  $d$  est la longueur de ce segment  $[AH]$ .

C'est la **plus courte distance** entre le point  $A$  et n'importe quel point  $M$  de la droite  $d$ .

Pour tout point  $M \in d$ , on a toujours :  $AH \leq AM$

**Explication :** Dans le triangle  $AHM$  rectangle en  $H$ , l'hypoténuse  $[AM]$  est toujours le côté le plus long.

### 3/ Calculs de grandeurs

La résolution de problèmes géométriques nécessite de bien maîtriser les calculs d'aires.

| Figure                                              | Aire ( $\mathcal{A}$ )               | Périmètre ( $\mathcal{P}$ )           |
|-----------------------------------------------------|--------------------------------------|---------------------------------------|
| <b>Rectangle</b> de longueur $L$ et largeur $l$     | $\mathcal{A} = L \times l$           | $\mathcal{P} = 2 \times (L + l)$      |
| <b>Triangle</b> de base $b$ et hauteur $h$ associée | $\mathcal{A} = \frac{b \times h}{2}$ | Somme des 3 côtés                     |
| <b>Disque / Cercle</b> de rayon $r$                 | $\mathcal{A} = \pi \times r^2$       | $\mathcal{P} = 2 \times \pi \times r$ |

### 4/ Optimisation en géométrie

#### Définition

L'**optimisation** consiste à rechercher la valeur **maximale** ou **minimale** d'une grandeur (aire, volume, périmètre, distance) lorsque la configuration géométrique (souvent la position d'un point) varie.

#### Méthode de résolution d'un problème d'optimisation

1. **Modéliser** : Choisir une longueur variable, souvent notée  $x$ .
2. **Mettre en équation** : Exprimer la grandeur à optimiser en fonction de  $x$ . On obtient une fonction  $f(x)$ .
3. **Résoudre** : Trouver pour quelle valeur de  $x$  la fonction atteint son maximum ou son minimum (par calcul, tableau de valeurs ou graphique).

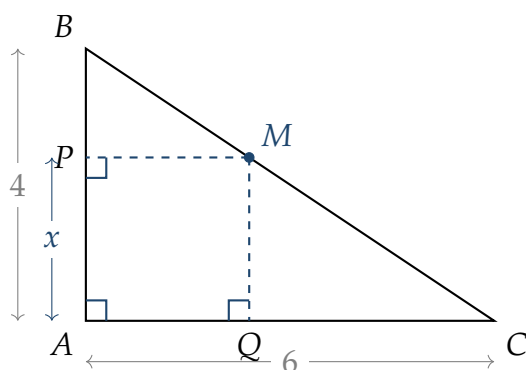
#### Problème type : Le rectangle inscrit

Soit  $ABC$  un triangle rectangle en  $A$  tel que  $AB = 4$  cm et  $AC = 6$  cm.

Soit  $M$  un point mobile sur l'hypoténuse  $[BC]$ .

On appelle  $P$  le **projeté orthogonal** de  $M$  sur  $[AB]$  et  $Q$  le **projeté orthogonal** de  $M$  sur  $[AC]$ .

Où doit-on placer le point  $M$  pour que l'aire du quadrilatère  $APMQ$  soit maximale ?



### Étape 1 : Modélisation et nature de la figure

On pose  $x = AP$ . Comme  $P$  est sur le segment  $[AB]$ ,  $x$  appartient à l'intervalle : . Par définition du projeté orthogonal, les angles en  $P$  et en  $Q$  sont .....  
Le quadrilatère  $APMQ$  possède 3 angles droits, c'est donc un .....  
On en déduit que les droites  $(PM)$  et  $(AC)$  sont .....

### Étape 2 : Mise en équation (Théorème de Thalès)

Dans le triangle  $ABC$ , on sait que  $P \in [AB]$ ,  $M \in [BC]$  et  $(PM) \parallel (AC)$ . D'après Thalès :

$$\frac{BP}{BA} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} \quad \text{soit} \quad \frac{4 - x}{4} = \frac{PM}{6}$$

On en déduit l'expression de  $PM$  en fonction de  $x$  :  $PM = \dots\dots\dots$ . L'aire du rectangle, notée  $\mathcal{A}(x)$ , est :  $\mathcal{A}(x) = AP \times PM = x \times (\dots\dots\dots)$   
Soit  $\mathcal{A}(x) = \dots\dots\dots$

### Étape 3 : Recherche du maximum

Recherche effectuée en classe à l'aide de la calculatrice ou d'un tableau de valeurs...

### Conclusion :

L'aire maximale est de .....cm<sup>2</sup> et est obtenue pour  $x = \dots\dots\dots$ cm.  
Le point  $M$  doit donc être placé au .....de  $[BC]$ .