

Activité : L'emballage sur mesure

Introduction aux nombres réels, inéquations et intervalles

Partie 1 : Conception du carton

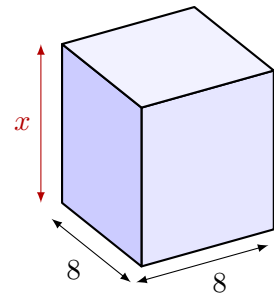
Une marque de sport conçoit une nouvelle boîte en carton pour ranger des accessoires de badminton (tubes de volants, surgrips, etc.).

Cette boîte a la forme d'un pavé droit dont la base est un carré fixe de 8 cm de côté.

Sa hauteur est notée x (en cm).

Le bureau d'étude impose deux contraintes :

- **Première contrainte :**
Pour contenir assez d'accessoires, le volume de la boîte doit être strictement supérieur à 640 cm^3 .
- **Deuxième contrainte :**
Pour des raisons de coût écologique, la surface latérale en carton (c'est-à-dire l'aire des 4 faces rectangulaires autour, sans compter le fond ni le couvercle) ne doit pas dépasser 480 cm^2 .



Rappels utiles :

- **Volume d'un pavé droit :**
 $V = \text{Longueur} \times \text{largeur} \times \text{hauteur}$
- **Aire d'un rectangle :**
 $A = \text{Longueur} \times \text{largeur}$

1. Exprimer le volume $V(x)$ de la boîte en fonction de x .
2. Exprimer la surface latérale $S(x)$ de la boîte (l'aire des 4 faces verticales) en fonction de x .
3. Traduire la **première contrainte** par une inéquation. Résoudre cette inéquation.
4. Traduire la **deuxième contrainte** par une inéquation. Résoudre cette inéquation.
5. Sur une droite graduée (prendre 1 cm pour 1 unité), hachurer en rouge les hauteurs x qui ne respectent pas la contrainte A, et en bleu celles qui ne respectent pas la contrainte B.
6. Quelles sont les valeurs possibles pour la hauteur x de la boîte ? Formuler la réponse par une phrase, puis par un encadrement.

Partie 2 : Un nouveau langage, les intervalles

En mathématiques, l'ensemble des nombres réels (tous les nombres possibles sur une droite graduée) compris entre deux valeurs se note à l'aide de crochets : c'est un **intervalle**.

Exemples :

- L'ensemble des nombres x tels que $2 \leq x \leq 7$ s'écrit $x \in [2; 7]$.
- Si le 7 est exclu ($2 \leq x < 7$), on tourne le crochet vers l'extérieur : $x \in [2; 7[$.
- Si x n'a pas de limite supérieure (ex : $x \geq 3$), on utilise $+\infty$ (plus l'infini) : $x \in [3; +\infty[$.
- Si x n'a pas de limite inférieure (ex : $x < 1$), on utilise $-\infty$ (moins l'infini) : $x \in]-\infty; 1[$.

Attention : Le crochet est **toujours ouvert** du côté de l'infini !

1. En utilisant cette nouvelle notation, écrire l'ensemble des solutions du problème de la boîte (Partie 1).
2. Compléter le tableau de traduction suivant :

Inéquation(s)	Droite graduée (dessiner et colorier)	Intervalle
$-2 \leq x \leq 5$		$x \in [-2; 5]$
$1 < x \leq 6$		
.....		$x \in]-3; 0[$
$-4 < x \leq 2$		
.....		$x \in [1; 5[$
$x \geq 4$		$x \in [4; +\infty[$
$x < 2$		
.....		$x \in]-\infty; 3]$
$x > -1$		