

Figure 1

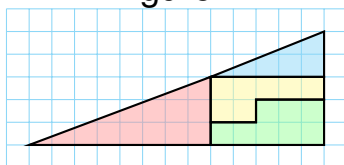
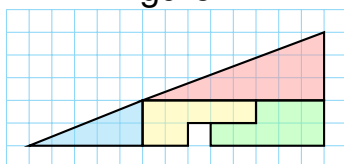


Figure 2


Exercice 1 – Relation de Chasles ★

Recopier et compléter par des noms de points :

- $\overrightarrow{A...} + \overrightarrow{B...} = \overrightarrow{AC}$
- $\overrightarrow{A...} + \overrightarrow{D...} + \overrightarrow{M...} = \overrightarrow{AG}$
- $\overrightarrow{F...} + \overrightarrow{...H} = \overrightarrow{FH}$
- $\overrightarrow{R...} + \overrightarrow{S...} = \overrightarrow{...T}$
- $\overrightarrow{...B} + \overrightarrow{B...} + \overrightarrow{C...} = \overrightarrow{AD}$

Exercice 2 – Milieux et vecteurs ★★

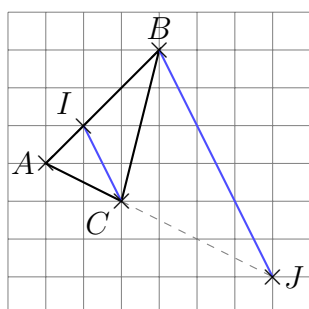
$ABCD$ est un parallélogramme. Les points I et J sont les milieux respectifs de $[AB]$ et $[CD]$.

- Faire une figure.
- Exprimer $\overrightarrow{JC}$ en fonction de $\overrightarrow{DC}$, et $\overrightarrow{AI}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.
- En déduire que $AICJ$ est un parallélogramme.

Exercice 3 – Colinéarité ★★

Soit ABC un triangle. On considère les points I et J définis par les relations suivantes :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AC}$$



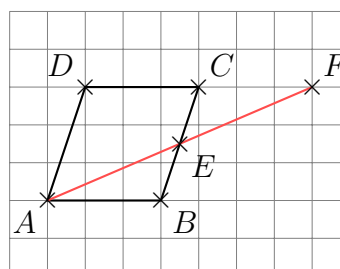
- En utilisant la relation de Chasles, exprimer le vecteur $\overrightarrow{IC}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
- De la même manière, exprimer le vecteur $\overrightarrow{BJ}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
- Déduire des questions précédentes une relation entre les vecteurs $\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{BJ}$.
- Que peut-on en conclure concernant les droites (IC) et (BJ) ? Justifier.

Exercice 4 – Colinéarité ★★

Soit $ABCD$ un parallélogramme.

On considère les points E et F définis de la manière suivante :

- E est le milieu du segment $[BC]$.
- F est le point tel que $\overrightarrow{DF} = 2\overrightarrow{AB}$.



- À l'aide de la relation de Chasles et des propriétés du parallélogramme, démontrer que :

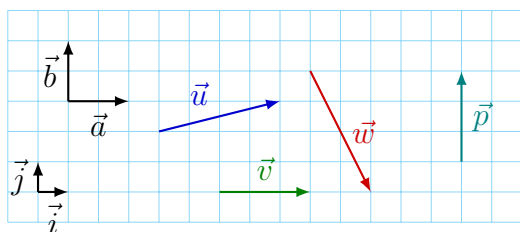
$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

- En utilisant à nouveau la relation de Chasles, exprimer le vecteur $\overrightarrow{AF}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
- Déduire des questions précédentes une relation de colinéarité entre les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$.
- Que peut-on en conclure concernant les points A , E et F ?

Exercice 5 – Milieux et quadrilatère
(Théorème de Varignon) ★★

Soit $ABCD$ un quadrilatère quelconque.
On note I, J, K et L les milieux respectifs
des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.

1. Construire une figure.
2. À l'aide de la relation de Chasles, exprimer $\overrightarrow{IJ}$ avec $\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{BJ}$.
3. En utilisant le fait que I et J sont des milieux, démontrer que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
4. Par un raisonnement analogue, exprimer le vecteur $\overrightarrow{LK}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AC}$.
5. Que peut-on en déduire pour les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{LK}$?
6. Conclure sur la nature du quadrilatère $IJKL$.

Exercice 6 – Base et Coordonnées ★

1. Écrire chaque vecteur $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{p}$ sous la forme $x\vec{i} + y\vec{j}$ où x et y sont des nombres réels.
2. Lire les coordonnées des vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{p}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.
3. Calculer les coordonnées des vecteurs :

a. $\vec{u} + \vec{v}$	a. $3\vec{u}$
b. $\vec{p} - \vec{w}$	b. $\frac{3}{2}\vec{w}$
4. Mêmes questions avec la base $(\vec{a}, \vec{b})$.

Exercice 7 – Coordonnées ★

Soit les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.
Calculer les coordonnées des vecteurs suivants :

- | | |
|----------------------------------|--|
| a. $-3\vec{w}$ | e. $2\vec{u} - 3\vec{w}$ |
| b. $\vec{u} - \vec{v}$ | f. $\frac{1}{2}\vec{w} - \frac{3}{2}\vec{v}$ |
| c. $\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$ | |

Exercice 8 – Coordonnées ★

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Dans chacun des cas, calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ puis contrôler graphiquement (on tracera sur la figure les traits auxiliaires nécessaires).

- a. $A(-3; 1)$ et $B(4; -2)$
- b. $A(-2; -3)$ et $B(1; 5)$
- c. $A(4; 2)$ et $B\left(-1; \frac{3}{2}\right)$
- d. $A\left(-\frac{1}{4}; 3\right)$ et $B(2; 3)$

Exercice 9 – Coordonnées ★★

$ABCD$ est un carré, le point E est le symétrique de A par rapport à B et le point I est le milieu de $[BC]$.

1. Justifier que $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ est un repère orthonormé du plan.
2. Déterminer les coordonnées des différents points de la figure puis montrer que I est le milieu de $[DE]$.
3. Démontrer ce résultat sans utiliser de repère.

Exercice 10 – Vecteurs colinéaires ★

Le plan est muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Vérifier que les vecteurs suivants sont colinéaires et compléter la relation $\vec{v} = \dots \vec{u}$:

- | | |
|---|--|
| a. $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -2 \\ -8 \end{pmatrix}$ | d. $\vec{u}\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 15 \\ -9 \end{pmatrix}$ |
| b. $\vec{u}\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix}$ | e. $\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 6 \\ 18 \end{pmatrix}$ |

Exercice 11 – Déterminant ★

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On donne les points $A(-4; 5)$, $B(8; -10)$, $C(2; -3)$, $D(-6; 7)$ et $E(-5; -6)$.

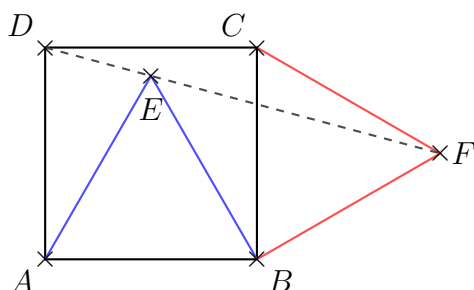
1. **Étude des droites (AB) et (CD)**
 - a. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.
 - b. Calculer le déterminant $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$.
 - c. Que peut-on en déduire pour les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$?
 - d. Conclure sur la position relative des droites (AB) et (CD) .

2. **Étude des droites (AB) et (CE)**
 - a. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CE}$.
 - b. À l'aide d'un calcul de déterminant, démontrer que les droites (AB) et (CE) ne sont pas parallèles.

Exercice 12 – Synthèse ★★★

Soit $ABCD$ un carré. On construit le triangle équilatéral ABE à l'intérieur du carré, et le triangle équilatéral BCF à l'extérieur du carré.

L'objectif de cet exercice est de démontrer que les points D , E et F sont alignés en utilisant deux méthodes différentes.

**Méthode 1 : Avec les coordonnées**

On se place dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

1. Donner, sans justifier, les coordonnées des points A , B , C et D .

2. Déterminer les coordonnées de E et F (on pourra utiliser les propriétés des hauteurs d'un triangle équilatéral).
3. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF}$.
4. Conclure sur l'alignement des points D , E et F .

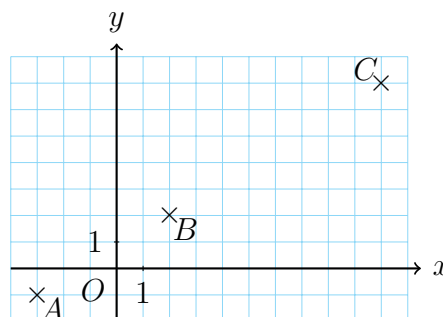
Méthode 2 : Avec les angles

1. Préciser la nature du triangle ADE , puis en déduire la mesure de l'angle $\widehat{AED}$.
2. En étudiant le triangle BEF , calculer la mesure de l'angle $\widehat{BEF}$.
3. Conclure sur l'alignement des points D , E et F .

Exercice 13 – Synthèse ★★

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On donne les points $A(-3; -1)$, $B(2; 2)$ et $C(10; 7)$.



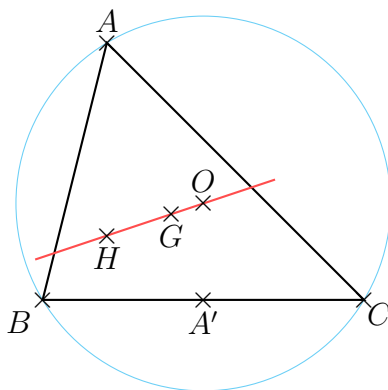
1. En observant la figure ci-dessus, quelle conjecture peut-on faire concernant les points A , B et C ?
2. Est-ce vrai?

Exercice 14 – La droite d'Euler (Synthèse)

Soit ABC un triangle quelconque non aplati.

On note O le centre de son cercle circonscrit (point de concours des médiatrices) et G son centre de gravité.

On appelle A' le milieu du segment $[BC]$.

**Partie A : Étude de l'orthocentre H**

On définit le point H par l'égalité vectorielle suivante (relation de Sylvester) :

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

1. En utilisant le fait que A' est le milieu de $[BC]$, montrer que $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA'}$.
2. Dédire de la relation définissant H et de la question précédente que : $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OA'}$.
3. Que sait-on de la position relative des droites (OA') et (BC) ? (*Indication : utiliser la définition du point O*).
4. À l'aide de la question 2, justifier que la droite (AH) est perpendiculaire à la droite (BC) .
5. Par un raisonnement identique, on pourrait démontrer que la droite (BH) est perpendiculaire à la droite (AC) . Que représente donc le point H pour le triangle ABC ?

Partie B : La droite d'Euler

On rappelle une propriété fondamentale du centre de gravité G d'un triangle :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

1. En introduisant le point O dans cette relation à l'aide de la relation de Chasles, démontrer que :

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$$

2. En utilisant la relation définissant H dans la partie A, déduire une relation vectorielle liant $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{OG}$.
3. Que peut-on conclure concernant les points O , G et H ?
(La droite passant par ces trois points est appelée la droite d'Euler du triangle).